DM optionnel 1: autour de la loi de Rayleigh

Cours de Probas 1A - Groupe 2

19 Novembre 2024

Enoncé

On se donne $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités, et

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathbb{1}_{x>0}.$$

Question 1

Montrer que f est une densité de probabilités, appelée densité de Rayleigh.

La fonction f est positive et mesurable car continue, et on a de plus sur $\mathbb{R}_+$,

$$|f(x)| \leq |x|e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Comme $x \mapsto |x|e^{-\frac{x^2}{2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, f aussi, et on a, par un calcul direct,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}\mathbb{1}_{x>0}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^{\infty} \\
&= 1.
\end{aligned} \tag{1}$$

Donc f est une densité de probabilité.

Question 2

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle de densité f. Montrer que $X \in L^2(\Omega, \mathbb{P})$, et calculer l'espérance et la variance de X.

Pour tout $p \geq 1$, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^p f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} x^p e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x < \infty,$$

car on a par exemple que

$$
\begin{aligned}
\exists M(p) > 0 : \forall x \geq M(p), \quad x^p \leq e^{\frac{x^2}{4}} \implies & \\
\int_0^\infty x^p e^{-\frac{x^2}{2}} \mathbf{1}_{x>0} \, \mathrm{d}x &\leq \int_0^{M(p)} x^p e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x + \int_{M(p)}^\infty e^{\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{M(p)} x^p e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x + \int_{M(p)}^\infty e^{-\frac{x^2}{4}} \, \mathrm{d}x < +\infty,
\end{aligned}
$$

ce qui implique que $X \in L^p(\Omega, \mathbb{P})$ pour tout $1 \leq p < \infty$, et en particulier que X est intégrable et de carré intégrable: l'espérance comme la variance de X sont donc toutes deux définies. On calcule donc:

$$
\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^\infty x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x = \left[-x e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \tag{2}
$$

où l'avant-dernière égalité découle d'une intégration par parties, en notant

$$
x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = x \cdot \left(x e^{-\frac{x^2}{2}} \right),
$$

et où la dernière égalité résulte de l'identité $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x = 1$, et de la parité de $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$. On a également

$$
\mathbb{E}[X^2] = \int_0^\infty x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d} = \left[-x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_0^\infty + 2 \int_0^\infty x e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x = 2 \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{d}x = 2, \tag{3}
$$

car f est une densité de probabilités par la question 1. On en déduit

$$
\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = 2 - \frac{\pi}{2}.
$$

Question 3

Calculer la fonction de répartition F_X de X.

Par définition, comme X admet la densité f, on a

$$
F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x) \, \mathrm{d}x.
$$

Comme f est identiquement nulle sur $]-\infty, 0]$, on a également $F_X(x) = 0$ pour tout $x \leq 0$. Si $x > 0$, par un calcul direct de primitive,

$$
F_X(x) = \int_0^x f(s) \, \mathrm{d}s = \int_0^x s e^{-\frac{s^2}{2}} \, \mathrm{d}s = \left[-e^{-\frac{s^2}{2}} \right]_0^x = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{4}
$$

De manière concise, on a

$$
F_X(x) = (1 - e^{-\frac{x^2}{2}}) \mathbb{1}_{x>0}.
$$

Question 4

En déduire la médiane de X, l'unique réel m tel que $\mathbb{P}(X \leq m) = \frac{1}{2}$.

On veut résoudre

$$\mathbb{P}(X \leq m) = F_X(m) = \frac{1}{2}. \tag{5}$$

En reprenant l'expression de la question 3, on se ramène à ,

$$1 - e^{-\frac{m^2}{2}} = \frac{1}{2} \iff e^{-\frac{m^2}{2}} = \frac{1}{2} \iff -\frac{m^2}{2} = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 \iff m^2 = 2\ln 2. \tag{6}$$

Donc $m \in \left\{-\sqrt{2\ln 2}, \sqrt{2\ln 2}\right\}$. Mais comme $F_X(x) = 0$ pour tout $x \leq 0$, on en déduit que l'unique solution est positive, c'est donc $m = \sqrt{2\ln 2}$.

Question 5

Calculer la loi de $Y = 1/X$ (donner sa densité). Y est-elle dans $L^1(\Omega, ,\mathbb{P})$?

On utilise le théorème de la fonction muette. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée, et $\psi : x \mapsto 1/x$. L'application composée $f \circ \psi$ est mesurable bornée, donc ce théorème donne:

$$\mathbb{E}[f(Y)] = \mathbb{E}[f\circ\psi(X)] = \int_{\mathbb{R}} f\circ\psi(x) x \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathbb{1}_{x>0}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty f\left(\frac{1}{x}\right) x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x. \tag{7}$$

Un changement de variable $y = 1/x$ donne

$$\mathbb{E}[f(Y)] = \int_0^\infty \frac{f(y)}{y^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2y^2}}\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} f(y) p_Y(y)\,\mathrm{d}y, \tag{8}$$

avec

$$p_Y(y) = \frac{\mathbf{1}_{x>0}}{y^3}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2y^2}}.$$

Comme f était une fonction mesurable bornée quelconque, ce même théorème de la fonction muette implique que Y suit la densité p_Y.
Pour déterminer l'integrabilité de Y, on détermine si l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} |y| p_Y(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2y^2}}\,\mathrm{d}y}{y^2}$$

est convergente. On vérifie facilement que $\lim_{y\to 0} y^{-2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2y^2}} = 0$. L'intégrande est donc continue sur $\mathbb{R}$, identiquement nulle sure $\mathbb{R}_-$, et donc en particulier intégrable sur $(-\infty, 1]$. En outre, pour $y \geq 1$, on a $y^{-2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2y^2}} \leq y^{-2}$, qui est intégrable sur $[1, +\infty)$. On conclut que $y \mapsto |y| p_Y(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, et $Y \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$.

On pouvait aussi calculer directement l'espérance à l'aide du changement de variable $z = 1/y$, et on trouvait facilement que $\mathbb{E}[Y] = \sqrt{\pi/2} = \mathbb{E}[X]$.

Problème:

Calculer la fonction caractéristique de X de la façon la plus explicite possible.

Cette question était plus difficile, et les outils que j'introduis dans cette correction ne sont pas au programme de l'examen. La méthode que je présenterais ici n'est pas la plus courte, mais elle est naturelle et par ailleurs utile en analyse pour le calcul de nombreuses transformées de Fourier.

$$g_X(\xi) = \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{i\xi X}\right], \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto e^{i\xi x}$ est bornée, et continue. On a donc par le théorème de la fonction muette,

$$\mathbb{E}[e^{i\xi X}] = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{9}$$

De plus, $|e^{i\xi x} f(x)| = |f(x)| = f(x)$, donc $x \mapsto e^{i\xi x} f(x)$ est absolument intégrable, ce qui assure que la fonction caractéristique est bien définie. Le même argument vaut bien entendu pour n'importe quelle variable aléatoire à densité.

Pour $\xi = 0$, on a trivialement

$$\mathbb{E}[e^{i\xi X}] = \mathbb{E}[1] = 1.$$

On suppose donc dans la suite que $\xi \neq 0$, et on calcule

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^\infty x e^{i\xi x} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty x e^{-\frac{1}{2}\left(x^2 - 2i\xi x\right)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty x e^{-\frac{1}{2}(x-i\xi)^2 - \frac{1}{2}\xi^2}\,\mathrm{d}x \\
&= e^{-\frac{\xi^2}{2}} \int_0^\infty x e^{-\frac{1}{2}(x-i\xi)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= e^{-\frac{\xi^2}{2}} \lim_{R\to\infty} \int_0^R x e^{-\frac{1}{2}(x-i\xi)^2}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{10}$$

On va identifier

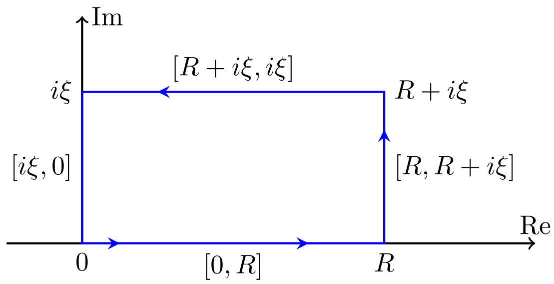
$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R x e^{-\frac{1}{2}(x-i\xi)^2}\,\mathrm{d}x.$$

L'idée est de faire le changement de variable complexe $y = x - i\xi$. Le lemme de Goursat permet de justifier rigoureusement ce changement de variable. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, $z \mapsto ze^{-\frac{1}{2}(z-i\xi)^2}$ est analytique: on peut en effet écrire son développement en série entière explicitement, et vérifier que son rayon de convergence est égal à $+\infty$. On va utiliser le lemme de Goursat.

Nous allons appliquer ce résultat dans le cas particulier où γ est un lacet polygonal qui correspond au parcours de la frontière du domaine complexe rectangulaire suivant,

$$\{a + ib,\, 0 \leq a \leq R,\, 0 \leq b \leq \xi\},$$

parcouru dans le sens direct, et divisé en quatre segments comme représenté dans la figure ci-dessous.



Pour un segment $[z_1, z_2] = \{z_1 + t\frac{z_2 - z_1}{|z_2 - z_1|}, t \in [0, |z_2 - z_1|]\}$, l'intégrale sur ce segment est donnée par

$$\int_{[z_1, z_2]} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{|z_2 - z_1|} f(z_1 + tu)\, u \,\mathrm{d}\, t, \tag{11}$$

où $u = \frac{z_2 - z_1}{|z_2 - z_1|}$ est l'argument complexe de $z_2 - z_1$. Notons que cette définition correspond à une paramétrisation naturelle du segment pour laquelle on le parcourt à une vitesse constante égale à 1.

On a donc:

$$\int_{[0,R]} ze^{-\frac{1}{2}(z-i\xi)^2}\,\mathrm{d}z, + \int_{[R,R+i\xi]} ze^{-\frac{1}{2}(z-i\xi)^2}\,\mathrm{d}z + \int_{[R+i\xi,i\xi]} ze^{-\frac{1}{2}(z-i\xi)^2}\,\mathrm{d}z + \int_{[i\xi,0]} ze^{-\frac{1}{2}(z-i\xi)^2}\,\mathrm{d}z = 0. \tag{12}$$

On traite ces termes séparément. Premièrement, pour $\xi > 0$, $u = i$ dans le deuxième terme de (11), ce qui donne

$$\begin{aligned}
\left|\int_{[R,R+i\xi]} ze^{-\frac{1}{2}(z-i\xi)^2}\,\mathrm{d}z\right| &= \left|i\int_0^{\xi} (R+ti)e^{-\frac{1}{2}(R+i(t-\xi))^2}\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_0^{\xi} \left|(R+ti)e^{-\frac{1}{2}(R+i(t-\xi))^2}\right|\,\mathrm{d}t \\
&= e^{-\frac{R^2}{2}} \int_0^{\xi} \left|(R+ti)e^{\frac{(t-\xi)^2}{2}}\right|\,\mathrm{d}t \\
&\leq e^{-\frac{R^2}{2}} \int_0^{\xi} (R+t)e^{\frac{(t-\xi)^2}{2}}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Les intégrales $\int_0^{\xi} e^{\frac{(t-\xi)^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{\xi} te^{\frac{(t-\xi)^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ étant finies, et comme

$$e^{-\frac{R^2}{2}},\, Re^{-\frac{R^2}{2}} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

on en déduit que

$$\forall \xi > 0,\ \lim_{R\to\infty} \int_{[R,R+i\xi]} ze^{-\frac{1}{2}(z-i\xi)^2}\,\mathrm{d}z = 0. \tag{13}$$

Un calcul analogue donne le même résultat pour $\xi < 0$, auquel cas $u = -i$.

D'autre part, on écrit

$$\int_{[R+i\xi,i\xi]} ze^{-\frac{1}{2}(z-i\xi)^2}\,\mathrm{d}z = -\int_0^R (R+i\xi-t)e^{-\frac{(R+i\xi-t-i\xi)^2}{2}}\,\mathrm{d}t = -\int_0^R (R-t+i\xi)e^{-\frac{(R-t)^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

Le signe $-$ devant l'intégrale dans la deuxième égalité provient du fait que

$$u = \frac{i\xi - (R+i\xi)}{|i\xi - (R+i\xi)|} = -1.$$

Par le changement de variable $s = R - t$, on réécrit cette intégrale comme

$$-\int_0^R (s+i\xi)e^{-\frac{s^2}{2}}\,\mathrm{d}s.$$

$$\left|-\int_0^R (s+i\xi)e^{-\frac{s^2}{2}}\,\mathrm{d}s\right| \leq \int_0^R |s+i\xi|\, e^{-\frac{s^2}{2}}\,\mathrm{d}s \leq \int_0^R (s+|\xi|)e^{-\frac{s^2}{2}}\,\mathrm{d}s < +\infty,$$

ce qui implique que la limite

$$\lim_{R\to\infty} \int_{[R+i\xi,i\xi]} ze^{-\frac{1}{2}(z-i\xi)^2}\,\mathrm{d}z = -\int_0^\infty (s+i\xi)e^{-\frac{s^2}{2}}\,\mathrm{d}s \tag{14}$$

est bien définie. Finalement, on écrit le terme

$$\int_{[i\xi,0]} ze^{-\frac{1}{2}(z-i\xi)^2}\,\mathrm{d}z = -i\int_0^\xi (i\xi - it)e^{-\frac{(i\xi-it-i\xi)^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^\xi (\xi - t)e^{\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \tag{15}$$

si $\xi > 0$ (avec alors $u = -i$), et

$$\int_{[i\xi,0]} ze^{-\frac{1}{2}(z-i\xi)^2}\,\mathrm{d}z = i\int_0^{-\xi} (i\xi+it)e^{-\frac{(i\xi+it-i\xi)^2}{2}}\,\mathrm{d}t = -\int_0^{-\xi} (\xi+t)e^{\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^\xi (\xi-s)e^{\frac{s^2}{2}}\,\mathrm{d}s \tag{16}$$

si $\xi < 0$ (avec alors $u = i$), où la dernière égalité provient du changement de variable $s = -t$. En notant

$$F(\xi) = \int_0^\xi e^{\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t,$$

on a donc dans tous les cas

$$\int_{[i\xi,0]} ze^{-\frac{1}{2}(z-i\xi)^2}\,\mathrm{d}z = \xi F(\xi) - \left[e^{\frac{t^2}{2}}\right]_0^\xi = \xi F(\xi) + 1 - e^{\frac{\xi^2}{2}}. \tag{17}$$

Au vu des équations (13),(14),(17), et de la relation (12), on a montré que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x e^{-\frac{1}{2}(x-i\xi)^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^\infty (s+i\xi)e^{-\frac{s^2}{2}}\,\mathrm{d}s - \xi F(\xi) - 1 + e^{\frac{\xi^2}{2}} \\ &= \left[-e^{-\frac{s^2}{2}}\right]_0^\infty + i\xi\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \xi F(\xi) - 1 + e^{\frac{\xi^2}{2}} \\ &= e^{\frac{\xi^2}{2}} - \xi F(\xi) + i\xi\sqrt{\frac{\pi}{2}}.\end{aligned}$$

Finalement, (10) nous donne une expression pour la fonction caractéristique, pour $\xi \neq 0$,

$$g_X(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}\left[e^{\frac{\xi^2}{2}} - \xi F(\xi) + i\xi\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right] = 1 - \xi e^{-\frac{\xi^2}{2}}\left[F(\xi) - i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right], \tag{18}$$

et on vérifie directement que cette expression reste valide pour $\xi = 0$. Ceci est une expression finale acceptable, puisque F n'as pas de forme explicite.