DM optionnel 2: valeurs propres d'une matrice aléatoire 2×2.

Cours de Probas 1A - Groupe 3

4 Décembre 2024

Énoncé

On se donne $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités, et on considère la matrice symétrique

$$\mathcal{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} \\ \mathcal{A}_{12} & \mathcal{A}_{22} \end{pmatrix},$$

où $\mathcal{A}_{11}, \mathcal{A}_{22} \sim \mathcal{N}(0,2)$ et $\mathcal{A}_{12} \sim \mathcal{N}(0,1)$ sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes. Noter que la valeur de la matrice aléatoire A est déterminée par celle d'un vecteur aléatoire, $Z = (\mathcal{A}_{11}, \mathcal{A}_{12}, \mathcal{A}_{22})$. On notera

$$A(z) = A(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_3 \end{pmatrix}.$$

Question 1

Justifier que Z est un vecteur gaussien, et montrer que pour toute $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mesurable bornée,

$$\mathbb{E}\left[f(Z)\right] = C \int f(z) \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(A(z)^2\right)} \, \mathrm{d}z_1 \mathrm{d}z_2 \mathrm{d}z_3,$$

où $C > 0$ est une constante à déterminer.

Le vecteur Z a des composantes gaussiennes indépendantes. C'est donc un vecteur gaussien. L'indépendance de ses composantes implique que sa densité est donnée par le produit de ses densités marginales:

$$p(z_1, z_2, z_3) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}z_1^2}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z_2^2}\right) \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}z_3^2}\right).$$

En simplifiant, on trouve

$$p(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi^{\frac{3}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\left(z_1^2+2z_2^2+z_3^2\right)}.$$

En notant que

$$A(z)^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} z_1^2 + z_2^2 & z_1z_2 + z_2z_3 \\ z_1z_2 + z_2z_3 & z_2^2 + z_3^2 \end{pmatrix},$$

on retrouve

$$p(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi^{\frac{3}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(A(z)^2)}.$$

Le résultat suit d'une application directe du théorème de la fonction muette.

On s'intéresse maintenant aux éventuelles valeurs propres de $\mathcal{A}$.

Question 2

Rappeler pourquoi $\mathbb{P}(\mathcal{A}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}) = 1$. Montrer que l'ensemble $\{z \in \mathbb{R}^3 : A(z)$ a une valeur propre double$\}$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue. On note $\lambda_1(z) \leq \lambda_2(z)$ les valeurs propres de $A(z)$. En déduire que $\mathbb{P}(\lambda_1(Z) \neq \lambda_2(Z)) = 1$.

Par le théorème spectral, toutes les matrices symétriques sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$. Donc,

$$1 = \mathbb{P}(\mathcal{A} \text{ est symétrique}) \leq \mathbb{P}(\mathcal{A} \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{R}) \leq 1.$$

Les valeurs propres de $A(z)$ sont les racines de son polynôme caractéristique

$$\lambda \mapsto \lambda^2 - (z_1 + z_3)\lambda + z_1z_3 - z_2^2.$$

Donc, $\lambda_1(z) = \lambda_2(z)$ si et seulement si le discriminant

$$\Delta(z) = (z_1 + z_3)^2 - 4(z_1z_3 - z_2^2) = (z_1 - z_3)^2 + 4z_2^2$$

s'annule. Notons $D = \left\{z \in \mathbb{R}^3 : \Delta(z) = 0\right\}$. On a $D = \{z_1 = z_3 \text{ et } z_2 = 0\} \subset \{z_2 = 0\}$. Or, $|\{z_2 = 0\}|$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^3$, et D également. Comme Z est un vecteur à densité, on a

$$\mathbb{P}(\lambda_1(Z) \neq \lambda_2(Z)) = 1 - \mathbb{P}(Z \in D) = 1 - \int_D p_Z(z)\,\mathrm{d}z = 1.$$

A présent, on diagonalise:

$$A(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} O(z)^\top \Lambda(z) O(z),$$

avec $O(z)$ est une matrice orthogonale paramétrisée par un angle de rotation $\theta(z)$, et $\Lambda(z)$ est une matrice diagonale:

$$O(z) = \begin{pmatrix} \cos\theta(z) & -\sin\theta(z) \\ \sin\theta(z) & \cos\theta(z) \end{pmatrix}, \qquad \Lambda(z) = \operatorname{diag}(\lambda_1(z), \lambda_2(z)).$$

Question 3

Montrer que le changement de variables $(z_1, z_2, z_3) = \varphi(\lambda_1, \lambda_2, \theta)$ associé à cette diagonalisation, donné par

$$\begin{cases} z_1 = \lambda_1 \cos^2\theta + \lambda_2 \sin^2\theta \\ z_2 = (\lambda_2 - \lambda_1)\cos\theta\sin\theta \\ z_3 = \lambda_1 \sin^2\theta + \lambda_2 \cos^2\theta \end{cases}$$

(vérifier ces expressions) est un C^1-difféomorphisme de

$$\mathcal{O} = \left\{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 : \lambda_1 < \lambda_2\right\} \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

sur son image à déterminer. Pourquoi est-ce suffisant de considérer $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$?

Par un calcul direct, $A(z_1, z_2, z_3)$ admet la décomposition spectrale

$$A(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{\top} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, (λ_1, λ_2) sont les valeurs propres de $\sqrt{2}A(z_1, z_2, z_3)$, et $\mathcal{B} = \{(\cos\theta, -\sin\theta)^{\top}, (\sin\theta, \cos\theta)^{\top}\}$ est une base orthonormée de vecteurs propres pour $A(z_1, z_2, z_3)$.

La fonction φ est clairement $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{O}$. Pour toute matrice symétrique $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, il existe par le théorème spectral deux nombres réels $\lambda_1 \leq \lambda_2$ et des vecteurs propres respectifs u, v associés, de norme 1, avec $u^{\top}v = 0$. Comme $|u| = 1$, il existe $\theta \in [-\pi, \pi]$ tel que $u = (\cos\theta, \sin\theta)^{\top}$ est un vecteur propre de M pour la valeur λ_1, et $v = \pm(-\sin\theta, \cos\theta)$ engendre l'orthogonal de u, qui est un espace propre pour la valeur propre λ_2. Comme $-u$ et $-v$ sont aussi des vecteurs propres, il existe en fait $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, tel que $(u, v) = \left((\cos\theta, \sin\theta)^{\top}, (-\sin\theta, \cos\theta)^{\top}\right)$ est une base orthonormée de vecteurs propres pour M, avec $Mu = \lambda_1 u$ et $Mv = \lambda_2 v$.

Cet argument montre que φ est surjective de $\widetilde{\mathcal{O}} := \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 : \lambda_1 \leq \lambda_2\} \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \{z \in \mathbb{R}^3 : A(z) \in \mathbb{R}^{2\times 2} \text{ est symétrique}\} = \mathbb{R}^3$. Par une propriété élémentaire des applications surjectives ($f : X \to Y$ est surjective $\implies$ $f : X \setminus Z \to Y \setminus f(Z)$ est surjective pour tout $Z \subset X$), on donc aussi que φ est surjective de $\mathcal{O}$ dans $\varphi(\mathcal{O}) = \mathbb{R}^3 \setminus \varphi\left(\widetilde{\mathcal{O}} \setminus \mathcal{O}\right)$. Calculons cet ensemble. On a:

$$\widetilde{\mathcal{O}} \setminus \mathcal{O} = \left(\left\{(\lambda_1, \lambda_2, \theta) \in \mathbb{R}^3 : \lambda_1 = \lambda_2\right\} \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) \cup \left(\left\{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3 : \lambda_1 \leq \lambda_2\right\} \times \left\{\pm\frac{\pi}{2}\right\}\right).$$

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a, par un calcul direct, $\varphi(\lambda_1, \lambda_1, \theta) = (\lambda_1, 0, \lambda_1)$, et pour tous $\lambda_1 \leq \lambda_2$, $\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \pm\frac{\pi}{2}) = (\lambda_2, 0, \lambda_1)$. On a donc que φ est surjective de $\mathcal{O}$ dans l'ouvert

$$\varphi(\mathcal{O}) = \mathbb{R}^3 \setminus \left\{z \in \mathbb{R}^3 : z_2 = 0 \text{ et } z_1 \geq z_3\right\}.$$

Calculons maintenant l'inverse de φ sur $\varphi(\mathcal{O})$. Il s'agit, étant donné $z \in \varphi(\mathcal{O})$, de montrer que problème au valeurs propres associé à $\sqrt{2}A(z)$ a une unique solution $(\lambda_1(z), \lambda_2(z), \theta(z)) \in \mathcal{O}$. Les contraintes $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\lambda_1 < \lambda_2$ servent précisément à garantir l'unicité de la solution. En reprenant le calcul du discriminant de la Question 2, les valeurs propres sont:

$$\lambda_1(z) = \frac{z_1 + z_3 - \sqrt{(z_1 - z_3)^2 + 4z_2^2}}{2}, \qquad \lambda_2(z) = \frac{z_1 + z_3 + \sqrt{(z_1 - z_3)^2 + 4z_2^2}}{2}.$$

Comme le discriminant $\Delta(z)$ est strictement positif sur $\varphi(\mathcal{O})$, les valeurs propres satisfont la contrainte $\lambda_1(z) < \lambda_2(z)$, et λ_1, λ_2 sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\varphi(\mathcal{O})$.

Reste à résoudre $\theta(z) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On sait que tout vecteur propre $(\cos\theta(z), \sin\theta(z))^\top$ est solution de l'équation aux valeurs propres:

$$\begin{cases} z_1 \cos\theta(z) + z_2 \sin\theta(z) = \lambda_1(z) \cos\theta(z), \\ z_2 \cos\theta(z) + z_3 \sin\theta(z) = \lambda_1(z) \sin\theta(z). \end{cases}$$

On distingue deux cas.

- Si $z_2 \neq 0$, la matrice $A(z_1, z_2, z_3)$ est non-diagonale, et en particulier $\theta(z) \notin \{-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\}$. En divisant la première équation par $\cos\theta(z) \in]0, 1[$, on trouve

  $$\tan\theta(z) = \frac{\lambda_1(z) - z_1}{z_2} \implies \theta(z) = \arctan\frac{\lambda_1(z) - z_1}{z_2} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

  On vérifie facilement qu'en travaillant sur la deuxième équation, on obtient plutôt

  $$\theta(z) = \arctan\frac{z_2}{\lambda_1(z) - z_3},$$

  (avec $z_2 \neq 0 \implies \lambda_1(z) \neq z_3$) ce qui donne la même solution puisque $(\lambda_1(z) - z_1)/z_2 = z_2/(\lambda_1(z) - z_3)$ du fait que $\lambda_1(z)$ est une racine du polynôme caractéristique. De même en travaillant avec l'équation sur $\lambda_2(z)$.

- Si $z_2 = 0$, on a nécessairement $z_1 < z_3$ (autrement $z \notin \varphi(\mathcal{O})$), et il s'ensuit que $\lambda_1 = z_1$, $\lambda_2 = z_3$, donc $(1, 0)^\top$ est un vecteur propre pour λ_1, et nécessairement $\theta = 0$.

Notons que la solution $\theta(z) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est déterminée de manière unique par la valeur de z et la contrainte $(\lambda_1(z), \lambda_2(z), \theta(z)) \in \mathcal{O}$. On a donc bien une bijection φ de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathcal{O}$ dans $\varphi(\mathcal{O})$, avec la bijection réciproque $\varphi^{-1}(z) = (\lambda_1(z), \lambda_2(z), \theta(z))$, où

$$\theta(z) = \mathbb{1}_{z_2 \neq 0} \arctan\left(\frac{\lambda_1 - z_1}{z_2}\right) = \arctan\left(\mathbb{1}_{z_2 \neq 0} \frac{z_3 - z_1 - \sqrt{(z_1 - z_3)^2 + 4z_2^2}}{2z_2}\right).$$

Vérifions que φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\varphi(\mathcal{O})$. Ici, on pouvait éviter un calcul douloureux en utilisant le théorème d'inversion globale: comme φ est bijective et $\mathcal{C}^1$ de $\mathcal{O}$ vers $\varphi(\mathcal{O})$, il suffit de vérifier que la différentielle $D\varphi$ est inversible sur $\mathcal{O}$. Pour ce faire, on pouvait vérifier que le Jacobien $\det D\varphi$ ne s'annule pas sur $\mathcal{O}$, ce qui suit facilement du calcul effectué à la Question 4.

Faisons ce calcul: le seul point délicat est de s'assurer que $\theta(z)$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\varphi(\mathcal{O})$. Posons $f(z) = \mathbb{1}_{z_2 \neq 0} \frac{z_3 - z_1 - \sqrt{(z_1-z_3)^2 + 4z_2^2}}{2z_2}$. Par composition (la fonction arctan étant $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$), il suffit de vérifier que les dérivées partielles définies pour $z_2 \neq 0$ par

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z_1} &= \frac{1}{2} z_2^{-1} \left(-1 - \frac{(z_1 - z_3)}{|z_1 - z_3|} \left(1 + \frac{4z^2}{(z_1 - z_3)^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right), \\
\frac{\partial f}{\partial z_2} &= \frac{1}{2} z_2^{-1} |z_1 - z_3| \left(\left(1 + \frac{4z_2^2}{(z_1 - z_3)^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{z_1 - z_3}{|z_1 - z_3|} \right) - 2 \left((z_3 - z_1)^2 + 4z_2^2 \right)^{-\frac{1}{2}}, \\
\frac{\partial f}{\partial z_3} &= \frac{1}{2} z_2^{-1} \left(1 + \frac{(z_1 - z_3)}{|z_1 - z_3|} \left(1 + \frac{4z^2}{(z_1 - z_3)^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right),
\end{aligned}$$

sont continues sur $\varphi(\mathcal{O})$. Remarquons d'abord que θ est clairement $\mathcal{C}^\infty$ sur $\varphi(\mathcal{O}) \cap \{z_2 \neq 0\}$. On vérifie donc que les dérivées partielles sont définies et continues sur $\varphi(\mathcal{O}) \cap \{z_2 = 0\}$.

Soit $z \in \varphi(\mathcal{O}) \cap \{z_2 = 0\}$, ce qui implique en particulier que $z_3 > z_1$. On a d'abord que $f(z_1 + h, 0, z_3) = f(z_1, 0, z_3 + h) = 0$ pour h suffisamment petit, et donc $\frac{\partial f}{\partial z_1}(z) = \frac{\partial f}{\partial z_3}(z) = 0$. De plus,

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} (f(z_1, h, z_3) - f(z_1, 0, z_3)) &= \frac{1}{h} \frac{z_3 - z_1 - \sqrt{(z_1 - z_3)^2 + 4h^2}}{2h} \\
&= \lim_{h \to 0} |z_3 - z_1| 2h^{-2} \left(1 - \left[1 + \frac{4h^2}{(z_1 - z_3)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right) \\
&= \lim_{h \to 0} |z_3 - z_1| 2h^{-2} \left(1 - \left[1 + \frac{2h^2}{(z_3 - z_1)^2} \right] \right) \\
&= -|z_3 - z_1|^{-1},
\end{aligned}$$

et donc $\frac{\partial f}{\partial z_2}(z) = -|z_3 - z_1|^{-1}$. Les dérivées partielles sont bien définies. Montrons qu'elles sont continues sur $\varphi(\mathcal{O})$.

On fixe maintenant une suite $z_n \to z$ avec $z_n \in \varphi(\mathcal{O})$ pour tout n. On peut supposer $z_{2,n} \neq 0$ pour tout n, car le long de $\{z_2 = 0\}$, la convergence des dérivées partielles a bien lieu par le calcul ci-dessus. On a $z_{2,n} \to 0$, et $z_{3,n} - z_{1,n} \to z_3 - z_1 > 0$. Ceci implique $(z_{1,n} - z_{3,n})/|z_{1,n} - z_{3,n}| = -1$ pour tout n suffisamment grand.

- Cette observation donne l'équivalent:

$$\frac{\partial f}{\partial z_1}(z_n) \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{1}{2} z_{2,n}^{-1} \left(-1 + \left[1 + \frac{4z_{2,n}^2}{(z_{1,n} - z_{3,n})^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \right) \sim \frac{-z_{2,n}}{(z_{1,n} - z_{3,n})^2} \to 0.$$

- Un calcul similaire traite $\frac{\partial f}{\partial z_3}$, z_1 et z_3 jouant des rôles symétriques.

- Comme
$$2\left((z_{3,n}-z_{1,n})^2+4z_{2,n}^2\right)^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow{n\to\infty} 2|z_3-z_1|^{-1},$$
il suffit de calculer l'équivalent
$$\frac{\partial f}{\partial z_2}(z_n) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2}|z_{3,n}-z_{1,n}|z_{2,n}^{-2}\left(\left[1+\frac{4z_{2,n}^2}{(z_{1,n}-z_{3,n})^2}\right]^{\frac{1}{2}}-1\right) \sim |z_{3,n}-z_{1,n}|^{-1} \to |z_1-z_3|^{-1}$$
pour conclure $-\frac{\partial f}{\partial z_2}(z_n) \to -|z_3-z_1|^{-1}$.

On en déduit que chacune des dérivées partielles de f est continue sur l'ouvert $\varphi(\mathcal{O})$, puis que φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\varphi(\mathcal{O})$.

Question 4

En déduire que la densité du vecteur aléatoire $(\lambda_1(Z), \lambda_2(Z), \theta(Z))$ est donnée par
$$q(\lambda_1,\lambda_2,\theta) = C\mathbb{1}_{\lambda_1<\lambda_2}\mathbb{1}_{-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}(\lambda_1^2+\lambda_2^2)}(\lambda_2-\lambda_1).$$
Quelle est la loi de $\theta(Z)$? Justifier que les valeurs propres de $\mathcal{A}$ sont indépendantes de ses vecteurs propres, et donner la densité du couple $(\lambda_1(Z), \lambda_2(Z))$.

On calcule le Jacobien de φ. La matrice jacobienne de φ au point $(\lambda_1, \lambda_2, \theta)$ est donnée par
$$D\varphi(\lambda_1,\lambda_2,\theta) = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2(\lambda_2-\lambda_1)\cos\theta\sin\theta \\ -\cos\theta\sin\theta & \cos\theta\sin\theta & (\lambda_2-\lambda_1)(\cos^2\theta-\sin^2\theta) \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2(\lambda_2-\lambda_1)\cos\theta\sin\theta \end{pmatrix}$$

Puis, en utilisant les propriétés du déterminant:

$$\begin{aligned}
\det D\varphi(\lambda_1,\lambda_2,\theta) &= (\lambda_2-\lambda_1)\begin{vmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\cos\theta\sin\theta \\ -\cos\theta\sin\theta & \cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta-\sin^2\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\cos\theta\sin\theta \end{vmatrix} && \text{(Linéarité par rapport à } C_3) \\
&= (\lambda_2-\lambda_1)\begin{vmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & \sin 2\theta \\ -\cos\theta\sin\theta & \cos\theta\sin\theta & \cos 2\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -\sin 2\theta \end{vmatrix} && \text{(Identités trigonométriques)} \\
&= (\lambda_2-\lambda_1)\begin{vmatrix} 1 & \sin^2\theta & \sin 2\theta \\ 0 & \cos\theta\sin\theta & \cos 2\theta \\ 1 & \cos^2\theta & -\sin 2\theta \end{vmatrix} && (C_1 \to C_1 + C_2) \\
&= (\lambda_2-\lambda_1)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \cos\theta\sin\theta & \cos 2\theta \\ 1 & \cos^2\theta & -\sin 2\theta \end{vmatrix} && (L_1 \to L_1 + L_3) \\
&= (\lambda_2-\lambda_1)\left(2\begin{vmatrix} \cos\theta\sin\theta & \cos 2\theta \\ \cos^2\theta & -\sin 2\theta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos\theta\sin\theta & \cos 2\theta \end{vmatrix}\right) && \text{(Développement en } C_1) \\
&= (\lambda_2-\lambda_1)\left(-2\cos\theta\sin\theta\sin 2\theta - 2\cos^2\theta\cos 2\theta + \cos 2\theta\right) \\
&= (\lambda_2-\lambda_1)\left(-\sin^2 2\theta + \cos 2\theta(1-2\cos^2\theta)\right) \\
&= (\lambda_2-\lambda_1)\left(-\sin^2 2\theta - \cos^2 2\theta\right) \\
&= -(\lambda_2-\lambda_1).
\end{aligned}$$

Notons que cette quantité ne s'annule pas sur $\mathcal{O}$, ce qui assure aussi le fait que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathcal{O}$ dans $\varphi(\mathcal{O})$ par le théorème d'inversion globale.

D'autre part, les valeurs propres de $2A(z)^2$ sont données par $\lambda_1(z)^2, \lambda_2(z)^2$, ce qui implique $\mathrm{Tr}(A(z)^2) = \frac{\lambda_1(z)^2+\lambda_2(z)^2}{2}$, et on a

$$\mathbb{P}(Z \in \varphi(\mathcal{O})) = 1,$$

l'ensemble $\mathbb{R}^3 \setminus \varphi(\mathcal{O})$ étant de mesure nulle. La densité de Z est donc donnée presque partout par

$$C\mathbb{1}_{z\in\varphi(\mathcal{O})}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\left(\lambda_1(z)^2+\lambda_2(z)^2\right)}.$$

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mesurable bornée. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[f(\lambda_1(Z),\lambda_2(Z),\theta(Z))\right] &= \mathbb{E}\left[f\circ\varphi^{-1}(Z)\right] \\
&= C\int_{\mathbb{R}^3} f\circ\varphi^{-1}(z)\mathbb{1}_{z\in\varphi(\mathcal{O})}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}(\lambda_1(z)^2+\lambda_2(z)^2)} \\
&= C\int_{\mathbb{R}^3} f(\lambda_1,\lambda_2,\theta)\mathbb{1}_{(\lambda_1,\lambda_2,\theta)\in\mathcal{O}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}(\lambda_1^2+\lambda_2^2)}\left|\det D\varphi(\lambda_1,\lambda_2,\theta)\right| \mathrm{d}\lambda_1\mathrm{d}\lambda_2\,\mathrm{d}\theta \\
&= C\int_{\mathbb{R}^3} f\mathbb{1}_{\lambda_1<\lambda_1}\mathbb{1}_{-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}(\lambda_1^2+\lambda_2^2)}|\lambda_2-\lambda_1|.
\end{aligned}$$

On a utilisé le théorème de la fonction muette pour écrire l'égalité à la deuxième ligne, puis la formule de changement de variable appliquée à φ^{-1}, et enfin le calcul du Jacobien à la dernière ligne. On conclut avec une nouvelle application du théorème de la fonction muette que la densité q a bien la forme recherchée.

Par la formule des densités marginales, la densité de θ est donnée par $q_\Theta(\theta) = \int_{\mathbb{R}^2} q(\lambda_1, \lambda_2, \theta) \mathrm{d}\lambda_1 \, \mathrm{d}\lambda_2 = C' \mathbb{1}_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}(\theta)$ pour une certaine constante C'. Comme c'est une densité de probabilités, on a en fait $C' = 1/(\int_{\mathbb{R}} q_\Theta(\theta)) \, \mathrm{d}\theta = \pi^{-1}$, et donc $\theta \sim \mathcal{U}(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$. D'autre part, on remarque que q s'écrit sous la forme produit

$$q(\lambda_1, \lambda_2, \theta) = q_\Theta(\theta) g(\lambda_1, \lambda_2),$$

où

$$g(\lambda_1, \lambda_2) = \int_{\mathbb{R}} q(\lambda_1, \lambda_2, \theta) \, \mathrm{d}\theta = \pi C \mathbb{1}_{\lambda_1 < \lambda_2} \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)} (\lambda_2 - \lambda_1)$$

est la densité du couple $(\lambda_1(Z), \lambda_2(Z))$. Ceci implique que ce dernier est indépendant de $\theta(Z)$: les valeurs propres de $\mathcal{A}$ sont indépendantes de ses vecteurs propres, qui sont des fonctions de $\theta(Z)$.

Question 5

En considérant le changement de variable $(u, v) = (\lambda_1(z), \lambda_2(z) - \lambda_1(z))$, (à justifier avec précaution), calculer la loi du trou spectral $V = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_2(Z) - \lambda_1(Z))$. La reconnaissez-vous ?

Le changement de variable

$$\begin{cases} u = \lambda_1 \\ v = \lambda_2 - \lambda_1 \\ \lambda_1 < \lambda_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = u \\ \lambda_2 = u + v \\ v > 0 \end{cases}$$

est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^d \, : \, \lambda_1 < \lambda_2\}$ vers $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, de Jacobien $1 = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

La densité du couple $(\lambda_1(Z), \lambda_2(Z) - \lambda_1(Z))$ est donc donnée par

$$h(u, v) = \pi C \mathbb{1}_{v>0} \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}(u^2 + (u+v)^2)} v = \pi C \mathbb{1}_{v>0} v \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}v^2} \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\left(2u^2 + 2uv\right)}.$$

Par la formule des densités marginales, on en déduit que $\lambda_2(Z) - \lambda_1(Z)$ admet la densité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(u, v) \, \mathrm{d}u = \pi C \mathbb{1}_{v>0} v \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}v^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(u^2 + uv\right)} \, \mathrm{d}u.$$

En complétant le carré dans l'intégrale, on trouve que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(u^2 + uv\right)} = \mathrm{e}^{\frac{v^2}{8}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(u + \frac{v}{2}\right)^2} \, \mathrm{d}u = \sqrt{2\pi} \mathrm{e}^{\frac{v^2}{8}},$$

puis que $\lambda_2(Z) - \lambda_1(Z)$ a la densité

$$\pi C\sqrt{2\pi}\mathbb{1}_{v>0}v\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{8}} = \frac{1}{4}\mathbb{1}_{v>0}v\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{8}}.$$

En considérant $R = \frac{\lambda_2(Z)-\lambda_1(Z)}{2}$, on voit facilement que R suit une loi de Rayleigh standard (voir DM1), et le trou spectral a la même loi que $\sqrt{2}R$. C'est une Rayleigh de paramètre $\sigma^2 = 2$.